Versuch E5: Messung kleiner Widerstände / Thermoelement 20. November 01

Protokollanten: Malte Renius

Inga Zeisberg

Versuch E5:
Messung kleiner Widerstände / Thermoelement

1.1. Theorie zur Wheatstoneschen Brücke

In der Versuchsreihe E4 wurden bereits mittels der Wheatstoneschen Brücke Widerstände anhand eines bekannten Widerstandes gemessen. Die dabei gemessenen Widerstände waren so groß, dass der Widerstand der Zuleitung vernachlässigbar war. Um z.B. die spezifische Leitfähigkeit bzw. den spezifischen Widerstand von Metallen zu messen ist eine Schaltung notwendig, welche die Zuleitung nicht misst, da diese in diesem Falle nicht vernachlässigbar ist.
Hierzu wird die sog. Thomson-Brücke verwendet.

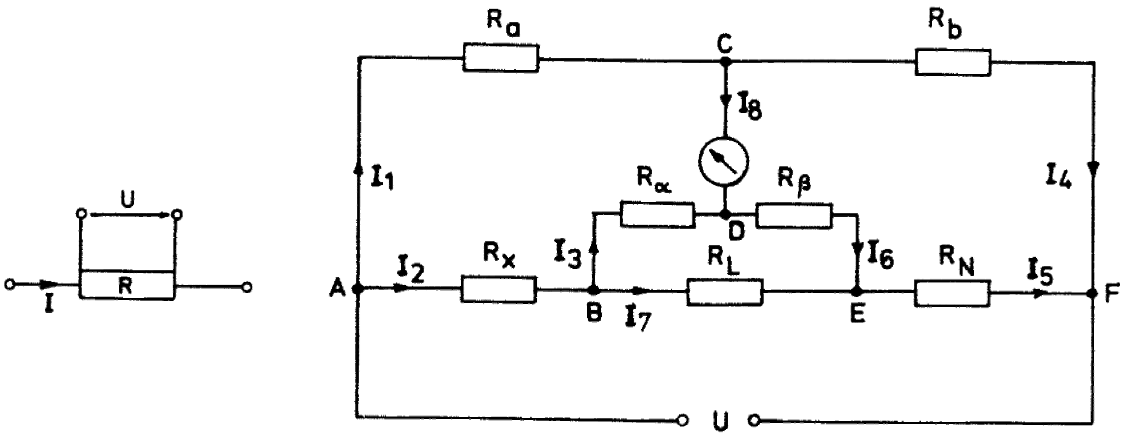


Abb. 1: Schaltbild der Thomson-Brücke (daneben die schematische Darstellung des Vierpolwiderstands)

Die Widerstände werden als vierpolige Widerstände ausgebildet, die zwei Stromzuführungen und zwei Potentialleitungen besitzen. Dabei wird der Widerstand zwischen den Verzweigungspunkten R_x gemessen, der Leitungswiderstand (in Abb. 1 als R_L dargestellt) geht jedoch nicht in die Messung ein

Die Abgleichbedingungen (Ziel $I_8=0$) sind können durch die Kirchhoffschen Gesetze ermittelt werden:

$I_1 = I_4 + I_8$ (folgt aus der Kontenregel bezogen auf C) [1.1]

$I_2 = I_3 + I_7$ (Knotenregel bezogen auf B) [1.2]

$I_5 = I_6 + I_7$ (folgt aus der Kontenregel bezogen auf E) [1.3]

$I_6 = I_3 + I_8$ (Knotenregel bezogen auf D) [1.4]

Im Falle einer Stromlosigkeit im Brückenzweig ($I_8 = 0$) lassen sich die obenstehenden Gleichung wie folgt vereinfachen:

I_4=I_1 (aus 1.1) [1.5], I_6=I_3 (aus 1.4) [1.6], I_5=I_2 (aus 1.6) [1.7]

Durch die Anwendung des Kirchhoffschen Maschenregel auf die Masche BDE erhält man folgenden Term: $R_\alpha I_3 + R_b I_6 - R_L I_7 = 0$ [1.8]. Aus 1.6 folgt $I_7 = \frac{R_\alpha + R_\beta}{R_L} I_3$ [1.9].

Nach diesen Gleichsetzungen im Rahmen der Knotenregel blieb nur Gleichung 1.2 (und die analoge Gleichung 1.3) zur Berechung des Widerstandes übrig. Wenn man 1.9 in 1.2einsetzt erhält man $I_3 = \frac{I_2}{1 + \frac{R_\alpha + R_\beta}{R_L}}$ [1.10].

Für die Maschen ACDB und CFED gilt:

$R_a I_1 - R_\alpha I_3 - R_x I_2 = 0$ [1.11]

$R_b I_4 - R_N I_5 - R_\beta I_2 = 0$ [1.12]

Durch Einsetzen von 1.10 in 1.11 erhält man

$$R_a I_1 - \left(\frac{R_\alpha}{1 + \frac{(R_\alpha + R_\beta)}{R_L}} + R_x \right) I_2 = 0 \quad [1.13]$$

$$R_b I_1 - \left(\frac{R_\beta}{1 + \frac{(R_\alpha + R_\beta)}{R_L}} + R_N \right) I_2 = 0 \quad [1.14]$$

Da I_1 und I_2 ungleich Null, sind die beiden obenstehenden Gleichungen nur lösbar, wenn gilt

$$R_x R_b - R_N R_a = \frac{R_a R_\beta - R_b R_\alpha}{1 + \frac{(R_\alpha + R_\beta)}{R_L}} \quad [1.15]$$

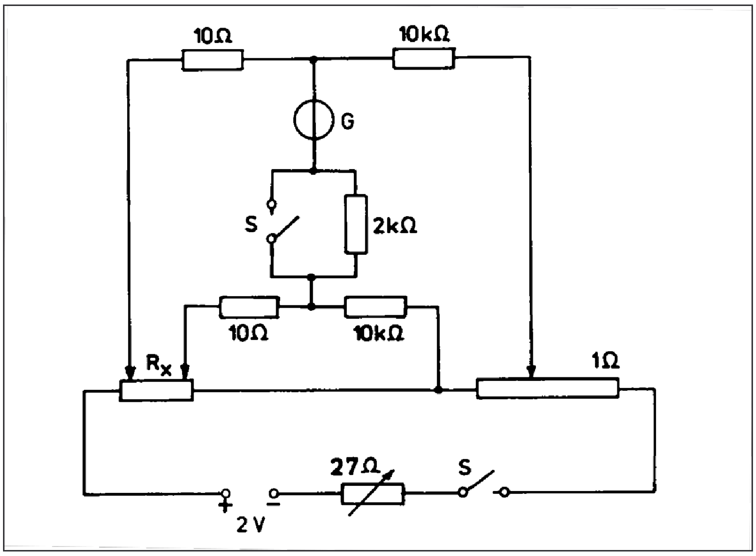
Um die rechte Seite dieser Gleichung verschwinden zu lassen, wählt man

$R_a R_\beta = R_b R_\alpha$ [1.16]

Damit wird die Abgleichung unabhängig von dem Leitungswiderstand R_L. Gleichung 1.15 erhält die einfache Form $R_x = \frac{R_a}{R_b} R_N$ [1.17].

1.2. Durchführung der Messungen

Zur Durchführung der Messung wurde eine Schaltung mit besonders einfachen Widerstandswerten gewählt (R_a=R_α=10Ω, R_b=R_β=10kΩ). Der Leitungswiderstand R_L ist nicht eingezeichnet. Er befindet sich zwischen R_X und dem Anschluss zum Schleifdraht. Zur Verbesserung des Messergebnisses wird zusätzlich zum Voltmeter ein Drehspulgalvanometer verwendet.



Messergebnisse

Stab Nr.	Stablänge [m]	Durchmesser d. Stabes [m]	Schleiferpos. [m]	R_N [Ω]	R_x [mΩ]	Spez. Widerstand [10^{-6} Ω/m]
1	0,121±10%	0,0050±1%	0,235±0,005	0,313±0,007	0,313±0,007	0,051±0,005
2	0,121±10%	0,0050±1%	0,076±0,005	0,101±0,007	0,101±0,007	0,016±0,002
3	0,121±10%	0,0050±1%	0,312±0,005	0,415±0,007	0,415±0,007	0,067±0,007
4	0,121±10%	0,0100±1%	0,522±0,005	0,694±0,007	0,694±0,007	0,450±0,050
5	0,121±10%	0,0050±1%	0,263±0,005	0,350±0,007	0,350±0,007	0,057±0,006
6	0,121±10%	0,0050±1%	0,317±0,005	0,421±0,007	0,421±0,007	0,068±0,007

Der Widerstand R_N ergibt sich aus dem Produkt des Gesamtwiderstandes des Schleifers (1,33Ω) mit der Schleiferposition. Aus R_N ergibt sich wiederum anhand von Gleichung 1.17 der Wert zu messenden Widerstandes R_x.

Den spezifischen Widerstand kann ermittelt werden, indem man die Formel $R_x = \frac{l \cdot \rho}{A}$ [1.18] nach ρ auflöst. Durch gleichzeitiges Einsetzen der Formel für die Kreisfläche erhält man

$\rho = \frac{R_x \cdot r^2 \pi}{l}$ [1.19].

Zu den Messunsicherheiten

Für die Stablänge wurde eine großzügige Messunsicherheit von 10% gewählt, da der Stab an den Polen an eine große Fläche angeklemmt ist, so dass der Anteil des Stabes, der als Widerstand in die Messung eingeht, nur unzureichend bestimmt werden kann.
Der Durchmesser des Stabes konnte mittels einer Schieblehre äußerst genau bestimmt werden, daher wurde als Messungenauigkeit 1% angesetzt.
Die Schleiferposition konnte z.T. nur z.T. sehr schwer ein exakter Wert ermittelt werden. Als Messungenauigkeit wurde deswegen eine Toleranz von ±0,002m angesetzt, welche deutlich größer als die Skaleneinteilung ist. Aus dieser Toleranz folgt dann direkt die Ungenauigkeit von R_N und R_X.
Um die Messunsicherheit des spezifischen Widerstands zu ermitteln, müssen alle Messunsicherheiten in 1.19 (bis auf π natürlich) nach dem Fehlerfortpflanzungsgesetz verrechnet werden (Wurzel der Quadratsumme).

Zuordnung der Stäbe über ihren spezifischen Widerstand

Stab Nr.	Spez. Widerstand [10^{-6} Ω/m]	Metalle innerh. d. Toleranz mit spez. Widerstand [10^{-6} Ω/m]	Metalle außerh. d. Toleranz mit spez. Widerstand [10^{-6} Ω/m]
1	0,051 ±0,005	Molybdän (0,052)	Zink (0,0591), Wolfram (0,110)
2	0,016 ±0,002	Kupfer (0,0167), [Silber (0,0159)]	
3	0,067 ±0,007	Nickel (0,0684), [Cadmium (0,0683)]	
4	0,45 ±0,05	Titan (0,420)	
5	0,057 ±0,006	Zink (0,0591), Wolfram (0,0565)	Molybdän (0,052)
6	0,068 ±0,007	Nickel (0,0684), [Cadmium (0,0683)]	

Die Tabelle zeigt die Zuordnung der Stäbe über ihren spezifischen Widerstand. Dabei sind jene Metalle in eckigen Klammern, deren spezifischer Widerstand zwar für eine Zuordnung spricht, die jedoch aus anderen Gründen nicht zutreffen können:

- Stab 2 war von der Färbung her eindeutig Kupfer, so dass Silber als mögliches Metall nicht in Frage kommt.
- Stab 3 und 6 sind mit Sicherheit nicht Cadmium, da sich Cadmium an der Luft verfärbt und außerdem ein sehr aggressives Metall ist, welches nicht ohne weiteres in einem einfachen Experiment verwendet werden könnte.

Die Zuordnung der Metalle ist insgesamt befriedigend. Die Doppelung von Nickel geht wahrscheinlich auf Probleme mit dem Erreichen des Nullstroms zurück. Bei der Messung von

Stab 3 war die Justierung der Galvanometers besonders schwierig, evtl. aufgrund eines mangelhaft eingespannten Stabes oder einer Berührung des Stabes.

2.1. Theorie zum Thermoelement

Der Theorie des Thermoelements liegt das Phänomen zugrunde, daß zwischen zwei Enden eines Leiters, welche eine unterschiedliche Temperatur erhalten, ein elektrisches Feld entsteht, das eine Spannung zwischen den beiden Enden erzeugt. Diese Spannung ΔU wird als thermoelektrische Spannung bzw. Thermospannung bezeichnet.

Dieser Effekt wird vereinfacht durch die Vorstellung erklärt, das „Elektronengas" hätte ähnlich wie normalen Gas die Eigenschaft, sich auszudehnen bzw. sein Volumen zu verringern. Durch den resultierenden Über- und Unterdruck entsteht die Spannung.

Falls die Temperaturdifferenz ΔT klein gegen T ist, ist ein proportionaler Zusammenhang zwischen der Spannung und der Temperatur zu beobachten:

$\Delta U = -S \cdot \Delta T$ [2.1]

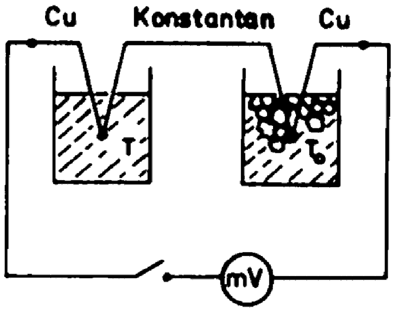
Der Koeffizient S wird als Seebeck-Koeffizient bezeichnet. Dieser Koeffizient ist materialabhängig und liegt bei Metallen in der Größenordnung von $\frac{\mu V}{K}$. Bei einem geschlossenen Ring aus einheitlichem Material heben sich bei partieller Erwärmung die Thermospannungen gegenseitig auf, wohingegen bei der Verlötung zwei verschiedener Metalle A und B zwischen den beiden Lötstellen unterschiedlicher Temperatur eine Spannung auftritt:

$\Delta U_{AB} = -S_1 \Delta T - (-S_2 \Delta T) = (S_1 - S_2)\Delta T = S_{12}\Delta T$ [2.2]

Die durch 2.1 und 2.2 beschriebenen Zusammenhänge gelten, wie oben bereits erwähnt nur für den Fall, dass ΔT klein hinreichend klein ist. Für andere Fälle muss ein integraler Ansatz verwendet werden:

$U_{AB} = \int_{T}^{T'} \left(S_2 - S_1\right) dT$ [2.3]

Versuchsaufbau



Im folgenden Versuch wurde die obenstehende Schaltung verwendet. T_0 wurde durch Verwendung von Eis nahe 0°C gehalten. Daraufhin wurde die Spannung zusammen mit der Temperaturveränderung gemessen.

Zur Messungenauigkeit

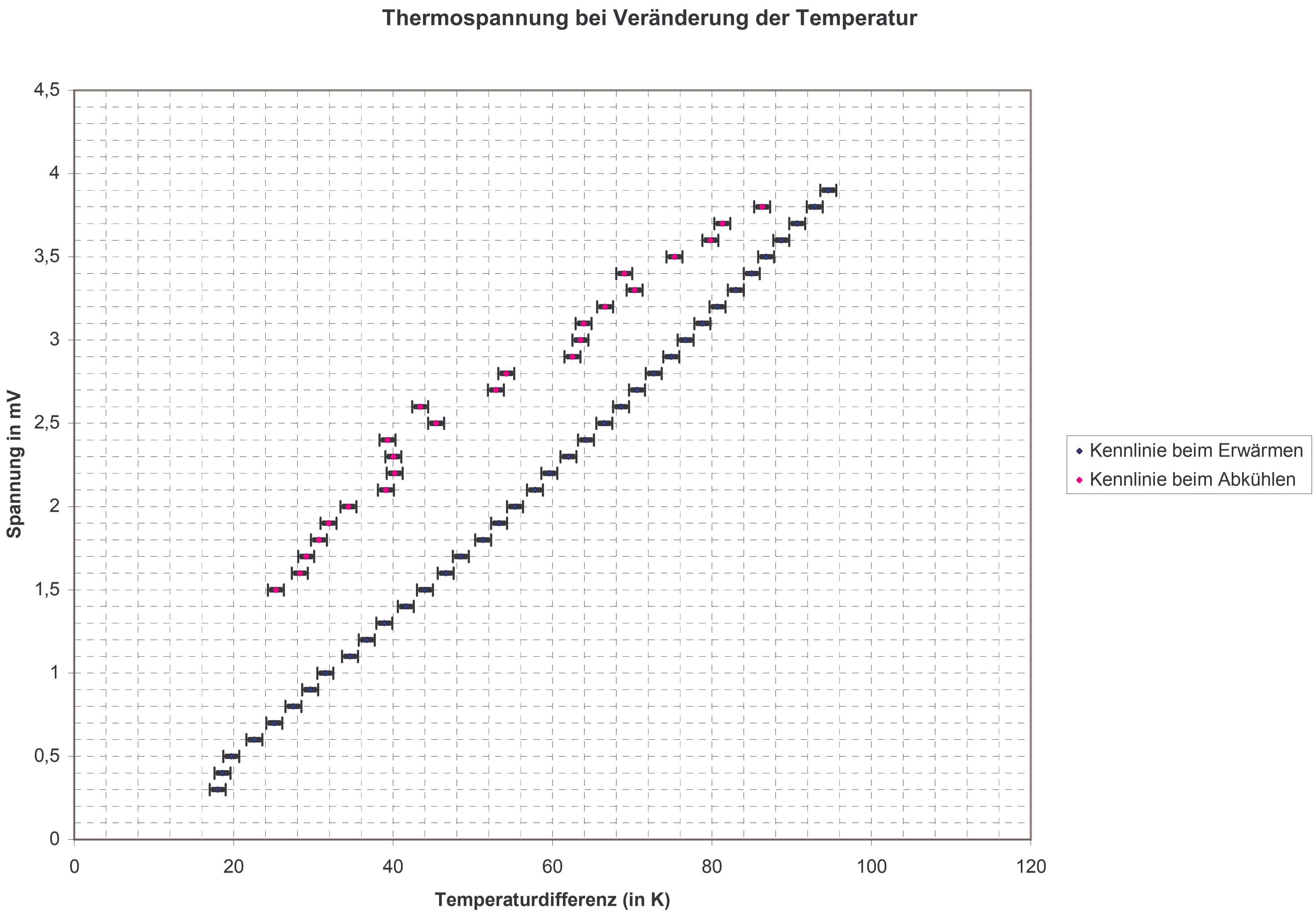
Im Diagramm ist für die Werte der Temperaturdifferenz eine recht großzügige Toleranz von ±1K angesetzt, da mit dem vorliegenden Thermometer nicht die Temperatur der Lötstellen, sondern nur die Temperatur des Wassers gemessen werden konnten (die Lötstellen waren durch ein Reagenzglas von dem Wasser isoliert). Die Messungenauigkeit der Werte für die Thermospannung ist aufgrund der Genauigkeit des Millivoltmeters auf lediglich ±0,01mV anzusetzen.

Auswertung anhand des Diagramms

Aus den beiden Kennlinien lassen sich durch Anlegen eines Steigungsdreieck folgende Werte über die aus 2.2 entwickelte Formel $S_{12} = \frac{\Delta U_{AB}}{\Delta T}$ folgende Werte entnehmen: 0,044 $\frac{\mu V}{K}$ für bei der Erwärmung und 0,040 $\frac{\mu V}{K}$ beim Abkühlen der zweiten Lötstelle. Eine Messungenauigkeit ist hier schwer anzugeben. Theoretisch müssten die Werte identisch sein. Wenn man die Werte als zwei Stichproben ansieht, erhält man einen Mittelwert von 0,042 $\frac{\mu V}{K}$ und eine Standardabweichung von 0,002828 $\frac{\mu V}{K}$ und die einleuchtende Messunsicherheit von 0,002 $\frac{\mu V}{K}$. Der Messwert für die Thermokraft zwischen Kupfer und Konstantan ist somit

0,042±0,002 $\frac{\mu V}{K}$

Insgesamt wirkt der Wert aus der Kennlinie der Erwärmung zuverlässiger, da gleichmäßiger erwärmt werden konnte. Die Abkühlung erfolgte aus Zeitgründen durch Zugabe von Eis, was eine relativ ungleichmäßige Abkühlung bewirkte. Diese ist für die Streuung der Messwerte in der Kennlinie verantwortlich. Die Parallelverschiebung der Kennlinien ist wohl auf die Differenz zwischen der Temperatur im Reagenzglas, in dem sich die Lötstellen befinden und dem Wasserbad zurückzuführen. Beide Fehler währen durch eine langsamere Erwärmung und Abkühlung vermutlich zu beseitigen.


Thermospannung bei Veränderung der Temperatur
Spannung in mV
4,5
4
3,5
3
2,5
2
1,5
1
0,5
0
0
20
40
60
80
100
120
Temperaturdifferenz (in K)
Kennlinie beim Erwärmen
Kennlinie beim Abkühlen