O2 Optische Instrumente 22. April 02

Protokollanten: Malte Renius
Inga Zeisberg

Versuch O 2:
Optische Instrumente

1. Theorie zur Mikroskop und Fernrohr

Das menschliche Auge kann sowohl auf weite Entfernungen Gegenstände nicht detailliert erkennen, als auch auf kurze Abstände kleine Gegenstände aufgrund der deutlichen Sehweite des Auges nicht beliebig auflösen. Zu diesem Zweck werden zwei Vergrößerungsinstrumente verwendet: Das Mikroskop für Vergrößerungen kleiner Gegenstände im Nahbereich; das Fernrohr zum Vergrößern weiter entfernterer Objekte.
Die Vergrößerung entsteht dabei durch die Vergrößerung des Sehwinkels (Angular- bzw. Winkelvergrößerung), welche über den Tangens des Winkels definiert wird:

$$V = \frac{\tan\alpha_m}{\tan\alpha_0} \qquad (1)$$

Dabei ist α_m der Sehwinkel mit bewaffneten Auge, α_0 ist der Sehwinkel mit bloßem Auge.

1.1 Mikroskop

1.1.1 Vergrößerung

Das Mikroskop lässt sich vereinfacht als ein System von zwei Linsen beschreiben: Das Objektiv als Linse mit sehr kurzer Brennweite, welches vom Gegenstand *G* ein Zwischenbild *B* erzeugt. Dieses Zwischenbild wird mit dem Okkular - der zweiten Linse – wie mit einer Lupe betrachtet. Liegt dabei das Zwischenbild in der Brennebene des Okkulars, so verlassen die Lichtbündel das Mikroskop parallel; das Auge akkumuliert auf Unendlich.
Für den Sehwinkel α_m gilt nach Abb. 1:

$$\tan\alpha_m = \frac{B}{f_{ok}} \qquad (2)$$

Für das unbewaffnete Auge definiert man die deutliche Sehweite *S* auf 25cm. Für den Sehwinkel gilt also:

$$\tan\alpha_0 = \frac{G}{s} \qquad (3)$$

Daraus folgt die Vergrößerung des Mikroskops:

$$V = \frac{\tan\alpha_m}{\tan\alpha_0} = \frac{B\ s}{f_{ok}\ G} \qquad (4)$$

Durch Umformung mit dem Strahlensatz erhält man hieraus:

$$V = \frac{\Delta}{f_{obj}} \cdot \frac{s}{f_{ok}} \qquad (5)$$

Bei Akkomodation auf deutliche Sehweite *s* (s. Abb. 2) ist die Vergrößerung deutlich größer:

$$V = \frac{\Delta}{f_{obj}} \cdot \left(\frac{s}{f_{ok}} + 1 \right) \qquad (7)$$

Auflösungsvermögen

Das Auflösungsvermögen eines Mikroskop ist als der Kehrwert des kleinsten Abstandes d_{min} definiert, also als eine Art eindimensionale Dichte. Der Wert d_{min} beschreibt dabei den kleinsten Abstand zwischen zwei Punkten, die noch voneinander unterscheidbar sind.
Zur Bestimmung des Auflösungsvermögen wird die Abbesche Theorie benutzt, welche die Trennbarkeit zweier Spalte davon abhängig macht, dass die Maxima erster Ordnung in die Objektivlinse eintreten. Andernfalls würden die beiden Spalte im Maximum erster Ordnung verschmelzen und somit untrennbar erscheinen.
Das Maximum 1. Ordnung wird unter einem Winkel φ_1 beobachtet. Für den Winkel gilt

$$\sin\varphi_1 = \frac{\lambda}{d} \qquad (8)$$

Für den minimalen Abstand erhält man Umformung von (8):

$$d_{\min} = \frac{\lambda}{\sin\sigma} = \frac{\lambda_{vac}}{n\sin\sigma} \qquad (9)$$

Das Auflösungsvermögen ist, wie oben bereits erwähnt, reziprok zu d_{min}:

$$U = \frac{1}{d_{\min}} = \frac{n\sin\sigma}{\lambda_{vac}} \qquad (10)$$

Der Ausdruck $n \sin \sigma$ wird als numerische Apertur bezeichnet. Aus ihr lässt sich bei bekannter Wellenlänge das Auflösungsvermögen eines Mikroskops berechnen.

1.2 Fernrohr

1.2.1 Vergrößerung

Die Vergrößerung einer Fernrohrs wird analog zum Mikroskop mittels der Gleichung (1) definiert; das die Brennebenen zusammenfallen ergibt sich für die Vergrößerung eines unendlich entfernten Objektes als Verhältnis der Brennweiten, welche sich aufgrund des Strahlensatzes durch die Pupillendurchmesser ersetzen lassen:

$$V_{\infty} = \frac{f_{obj}}{f_{ok}} = \frac{D}{d} \qquad (11)$$

Bei Objekten in endlicher Entfernung ist die Entfernung der Bildebene vom Objektiv größer als die Brennweite. Es gilt jetzt:

$$\tan\alpha_0 = \frac{a'}{b}; \quad \tan\alpha_m = \frac{a'}{f_{ok}} \qquad (12)$$

Daraus folgt:

$$V_g = \frac{b}{f_{ok}} \qquad (13)$$

Durch Anwendung der Linsenformel kann man *b* durch *g* und die Brennweite des Objektivs ausdrücken:

$$\frac{1}{f_{obj}} = \frac{1}{b} + \frac{1}{g} \qquad \Rightarrow \qquad b = \frac{f_{obj}\, g}{g - f_{obj}} \qquad (14)$$

Durch Einsetzen von (14) in (13) erhält man:

$$V_g = \frac{f_{obj}}{f_{ok}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{f_{obj}}{g}} \qquad (15)$$

Diese geht für $g \to \infty$ in (11) über.

1.2.2 Auflösung

Die Auflösung des Fernrohrs ist aufgrund der z.T. quasi unendlichen Entfernung zweier Punkte durch den minimalen Winkel zweier getrennt wahrgenommener Punkte definiert. Dabei wirkt die kreisförmige Lochblende des Fernrohrs als Lochblende, die ein Beugungsscheibchen in der Brennebene des Objektivs erzeugt. Um das Helligkeitsmaximum liegt ringförmig das Maximum erster Ordnung, für das gilt:

$$\sin\varphi_1 = 1{,}22\frac{\lambda}{D} \qquad (16)$$

Da φ_1 sehr klein ist, kann der Sinus dieses Winkels durch das Verhältnis $\frac{r_1}{f_{obj}}$ genähert werden. Für den Radius des ersten Maximums erhält man folglich:

$$r_1 = 1{,}22\frac{\lambda\, f_{obj}}{D} \qquad (17)$$

Zwei Bildpunkte lassen sich noch unterscheiden, wenn die das Maximum 0. Ordnung des einen Punktes in das erste Helligkeitsminimum des anderen fällt, d.h wenn ihr Mindestabstand B_{min} in der Bildebene gleich r_1 ist. Als kleinster Auflösbarer Sehwinkel ergibt sich daher:

$$\varphi_{\min} = \frac{r_1}{f_{obj}} = 1{,}22\frac{\lambda}{D} \qquad (18)$$

Für das Auflösungsvermögen ergibt sich daher:

$$U = \frac{1}{\varphi_{\min}} = 0{,}82\frac{D}{\lambda} \qquad (19)$$

Dem letzten Term von (19) wird meist noch ein Vorfaktor k vorangestellt, da der oben erwähnte Abstand der Helligkeitsmaxima in der Praxis oft nicht absolutes Kriterium für die Trennbarkeit zweier Punkte ist.

2. Durchführung der Versuche

2.1 Vergrößerung des Mikroskops

2.1.1 Eichung des Okularmikrometers

Einem Millimeter auf dem Objektmikrometer entsprachen 65 Skalenteile (von 100) auf dem Maßstab im Okular. Damit beträgt der Eichfaktor rechnerisch

$c = \frac{a}{a'} = \frac{Strecke\ auf\ dem\ Objektmikrometer}{Strecke\ auf\ dem\ Okularmaßstab} = \frac{1mm}{65\ Skt} = 0{,}015\frac{mm}{Skt}$. Eine Messunsicherheit hierzu ist schwer anzugeben. Da die Striche auf beiden Skalen jedoch gut ablesbar waren, müsste der Wert nicht mehr als 2% Toleranz haben.

2.1.2 Vergleich Okularmikrometer – Zentimeterstab

Mittels einem Aufsatz mit verspiegelter Glasplatte wird die Skalierung des Okularmikrometers mit einem Zentimeterstab im Abstand r verglichen.

Für $r = 28\pm1$cm wurden folgende Werte abgelesen:

Skalenteile auf dem Okularmikrometer	Referierender Wert auf dem Zentimeterstab [in mm]	Verhältnis nach Festlegung des Nullpunktes
1,6±0,1	0±0,1	
4,0±0,1	30,0±1	11,5±0,5
6,0±0,1	50,3±1	11,5±0,5
8,5±0,1	80,1±1	11,5±0,5

Wenn man den ersten Wert des Okularmikrometers als Nullpunktes festlegt, so lässt sich aus den drei weiteren Werten ein recht exakter Wert für das Verhältnis

$c' = \frac{A}{a'} = \frac{Strecke\ Zentimeterstab}{Skalenteile\ Okularmikrometer} = 11{,}5 \pm 0{,}5\frac{mm}{Skt}$ gewinnen.

Für die Vergrößerung des Mikroskops gilt nach (1): $V = \frac{\tan\alpha_m}{\tan\alpha_0} = \frac{A/r}{a/s} = \frac{A}{a}\cdot\frac{s}{r} = \frac{c'}{c}\cdot\frac{s}{r}$. Für eine deutliche Sehweite von 25cm erhält man für V den Wert 685±10%. Die 10% Messunsicherheit ergibt sich aus dem Produkt der Messunsicherheiten von r (3,8%), c (2%) und c' (4,3%).

2.2 Auflösungsvermögen des Mikroskops

Zur Messung der numerischen Apertur wird im Abstand l von der Blende mittels einer Lampe die Breite L des sichtbaren Bereichs gemessen. Für l wurde ein Abstand von 45±2cm gewählt. Für diesen Abstand misst man einen sichtbaren Bereich L von 25,5±1cm. Für das von L und $\frac{l}{2}$ aufgespannte Dreieck gilt $\sin\sigma = \frac{\frac{L}{2}}{\sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + l^2}}$ = 0,45±8,5%. Die Messunsicherheit für diesen Wert ist das Produkt der prozentualen Messunsicherheiten von L und l.

Da n_{Luft} mit 1 genähert werden kann, ist der obenstehende Wert für sin σ gleich der numerischen Apertur. Für das Auflösungsvermögen bei weißem Licht mit einer Wellenlänge von ca. 550 nm ergibt sich nach (10) $U = 8{,}2\cdot10^5 \pm 8{,}5\%$.

2.3 Auflösungsvermögen bei verschiedenen Wellenlängen

Mittels einer Spaltblende kann untersucht werden, für welche numerische Apertur zwei Striche auf dem Mikrometer noch unterscheidbar sind. Dabei wird Licht mit verschiedenen Wellenlängen verwendet.

Art des Lichts	l	L	sin σ
Blau (≈450nm)	39,0±1cm	7,7±0,5cm	0,098±9%
Weiss (≈550nm)	40,0±1cm	13,0±0,5cm	0,160±6%
Tiefrotes (≈650nm)	37,5±1cm	5,1±0,5cm	0,068±13%

Für die Messungenauigkeit von sin σ ist wiederum das Produkt der Ungenauigkeiten von l und L. Die gemessenen Werte weisen nicht die erwartete Beziehung zwischen Wellenlänge des Lichts und der numerischen Apertur. Normalerweise wäre eine Anstieg von sin σ mit der Wellenlänge zu beobachten. Der Fehler bei der Messung ist vermutlich auf die schlechte Bedienbarkeit der Spaltblende zurückzuführen, welche sich nur sehr schwer justieren ließ.

2.4 Vergrößerung eines auf Unendlich eingestellten Fernrohrs

Die Vergrößerung eines auf Unendlich eingestellten Fernrohres lässt sich mit der Gleichung (11) berechnen. Dabei kann der Durchmesser der Eintrittspupille mit einer Schieblehre gemessen werden. Die Austrittspupille kann mithilfe einer Skala im Fernrohr abgelesen werden. Beim Experiment ergaben sich für die beiden Pupillen folgende Werte:

Durchmesser der Eintrittspupille D: 49,9±1mm

Durchmesser der Austrittspupille d: 1,1±0,2mm

Durch Anwendung der oben genannten Formel erhält man V_∞=45±8. Die große Messunsicherheit ergibt sich durch die schlechte Ablesbarkeit des Wertes d.

Einen zuverlässigeren Wert erhält man im folgenden Experiment.

2.5 Vergrößerung eines auf endliche Entfernung eingestellten Fernrohrs

Bei diesem Experiment wird mit einem Auge eine beleuchtete Fläche aus mittleren Entfernung betrachtet, und mit dem anderen Auge durch das Fernrohr ein in dieser Fläche angebrachte Skala mit der Fläche in Deckung gebracht. Man misst, welche strecke a diese Maßstabs dem Auge unter dem gleichen Sehwinkel wie A erscheint. Aufgrund $s << l$ kann wie folgt genähert werden:

$$\tan\alpha_0 = \frac{a}{s-l} \approx \frac{a}{s}$$

Für den Sehwinkel des bewaffneten Auges gilt

$$\tan\alpha_m = \frac{A}{s}$$

Daraus ergibt sich für die Vergrößerung die Beziehung

$$V_g = \frac{A}{a}$$

Beim Experiment wurden folgende Werte gemessen (bzw. angegeben): s=20±0,1m, A=0,498±0,001m, a=0,0115±0,001m.

Damit ergibt sich V_g=43±4. Die Toleranz von s wurde hier vernachlässigt, da <1%. Die Messunsicherheit resultiert aus der schlechten Ablesbarkeit von a.

Nachtrag zu den Messunsicherheiten von V_g und V_∞

Nach dem Fehlerfortpfanzungsgesetz ist V_∞ in 2.4 folgende Unsicherheit zu erwarten:

$$u_{V_\infty} = \sqrt{u_D{}^2 + u_d{}^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{49{,}9}\right)^2 + \left(\frac{0{,}2}{1{,}1}\right)^2} = 0{,}18 \Rightarrow V_\infty = 45 \pm 18\% = 45 \pm 8{,}2$$

Die oben angewandte Vernachlässigung der Messunsicherheit von *D* ist also zulässig.

Für V_g ergibt sich folgende Unsicherheit

$$u_{V_g} = \sqrt{u_A{}^2 + u_a{}^2} = \sqrt{\left(\frac{0{,}001}{0{,}498}\right)^2 + \left(\frac{0{,}001}{0{,}0115}\right)^2} = 0{,}098 \Rightarrow V_g = 43 \pm 9{,}8\% = 43 \pm 4{,}2$$

Auch hier bestätigt sich die Vermutung, dass sich die Messunsicherheit von *A* ebenfalls vernachlässigen lässt.

Unter Berücksichtigung der Messunsicherheiten wurden tatsächlich die gleichen Werte für V_g und V_∞ gemessen.

Im Experiment wurde leider die Messung der Länge des Fernrohrs nicht durchgeführt. Wenn man annimmt, dass es sich bei V_g und V_∞ um exakte Werte handelt, kann man jedoch aufgrund der Gleichungen (11) und (15) die Brennweite des Objektiv ermittelt werden

$$\frac{V_\infty}{V_g} = 1 - \frac{f_{obj}}{g}; \; f_{obj} = g\left(\frac{V_\infty}{V_g} - 1\right) = 0{,}93m$$

Tatsächlich war das Fernrohr im Experiment kürzer, jedoch spricht das Ergebnis letztlich für die gemessenen Werte von V_g und V_∞.